Exercice 1 : **Sur 4 points**

1. L'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$ est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ dont le discriminant Δ est égal à : $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = -48$

Δ est strictement négatif, donc cette équation a deux racines complexes conjuguées z'et z''.

On a $\Delta = -48 = (4\sqrt{3}i)^2$

D'où : $z = \dfrac{-4 + 4\sqrt{3}i}{2}$ et $z' = \dfrac{-4 - 4\sqrt{3}i}{2}$

$\mathbf{z = -2 + 2i\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\mathbf{z' = -2 - 2i\sqrt{3}}$

D'où les solutions de cette équation : $\mathbf{-2 + 2i\sqrt{3}\ ;\ -2 - 2i\sqrt{3}}$

2. **a)** $P(4) = 4^3 - 64$
$P(4) = 64 - 64$
$\mathbf{P(4) = 0}$

b) Pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$.

$$\begin{aligned}(z-4)(az^2+bz+c) &= az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c\\ &= az^3 + (b-4a)z^2 + (c-4b)z - 4c.\\ &= z^3 - 64 \text{ pour tout nombre complexe.}\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 4b = 0 \\ -4c = -64 \end{cases} \quad \text{d'où} \begin{cases} \mathbf{a = 1} \\ \mathbf{b = 4} \\ \mathbf{c = 16} \end{cases}$$

On en déduit que $\mathbf{P(z) = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)}$

c) $P(z) = (z - 4)(z^2 + 4z + 16) = 0$

Soit $z - 4 = 0$ $\qquad$ soit $z^2 + 4z + 16 = 0$

$z = 4$ ou $\qquad$ $z = -2 + 2i\sqrt{3}$ ou $z = -2 - 2i\sqrt{3}$

L'équation $P(z) = 0$ admet 3 solutions dans $\mathbb{C}$: $\mathbf{4\ ;\ -2 + 2i\sqrt{3}\ ;\ -2 - 2i\sqrt{3}}$

3. **a)** A a pour affixe $z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$

$|z_A| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2}$
$|z_A| = \sqrt{4 + 4 \times 3}$
$|z_A| = \sqrt{16}$
$|z_A| = 4$

$$z_A = 4\left(-\frac{2}{4} + i\,\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$z_A = 4\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$z_A = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\mathbf{z_A = 4\, e^{i\frac{2\pi}{3}}}.$$

z_B est le conjuguée de z_A donc $z_B = \mathbf{4}\ e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

b) Voir dessin plus loin.

c) $AB = |z_B - z_A| = |-2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3}| = |-4\,i\sqrt{3}\,| = 4\sqrt{3}$
$AC = |z_C - z_A| = |\,4 + 2 - 2i\sqrt{3}\,| = |\,6 - 2i\sqrt{3}\,| = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
$BC = |z_C - z_B| = |\,4 + 2 + 2i\sqrt{3}\,| = |\,6 + 2i\sqrt{3}\,| = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
D'où **ABC est un triangle équilatéral**.

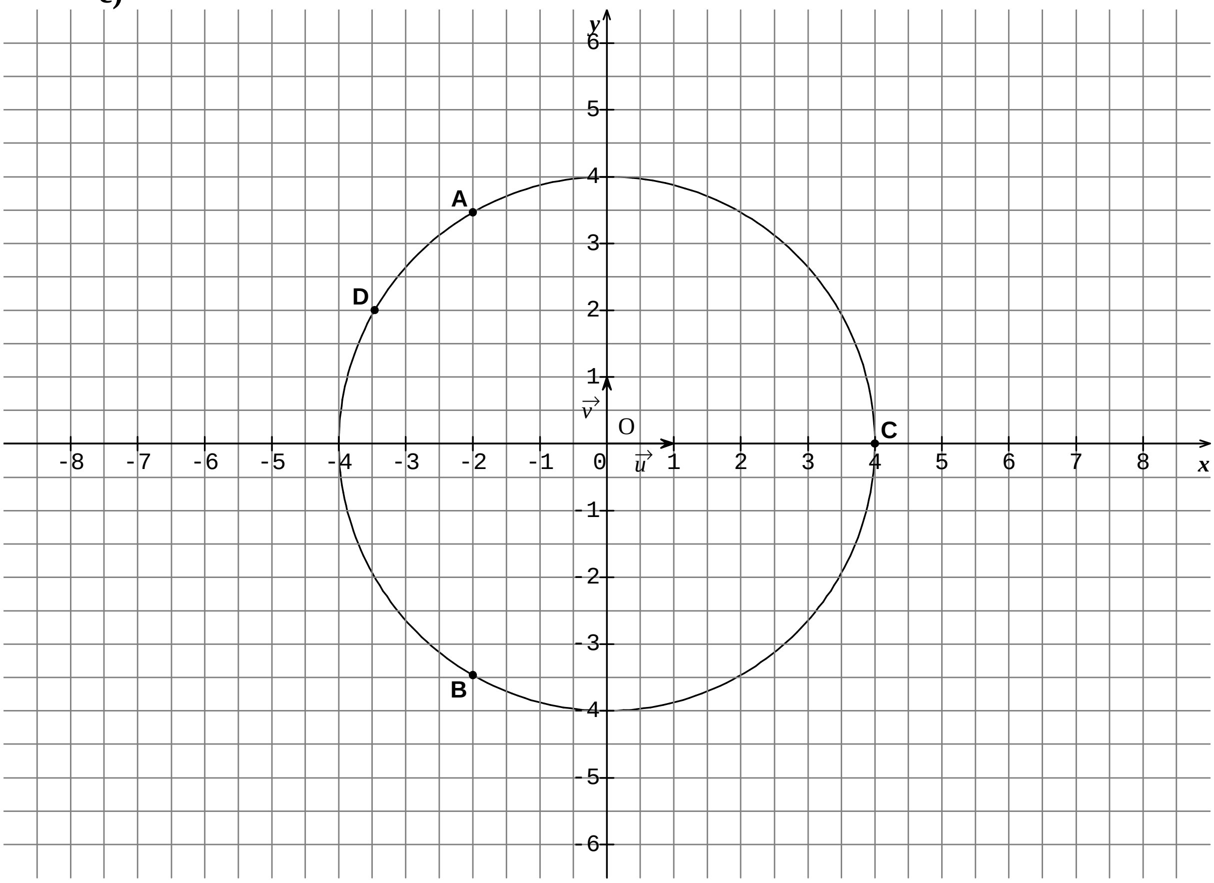
4. **a)** D = r(A) et r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ donc $z_D - z_O = e^{i\frac{\pi}{6}}(z_A - z_O)$

$$z_D = e^{i\frac{\pi}{6}} z_A$$
$$z_D = e^{i\frac{\pi}{6}} \times 4\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$z_D = 4\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}$$
$$\mathbf{z_D = 4\ e^{i\frac{5\pi}{6}}}$$

Le module de z_D est est 4 et son argument est $\frac{5\pi}{6}$.

b)
$$z_D = 4\ e^{i\frac{5\pi}{6}}$$
$$z_D = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$z_D = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\times\frac{1}{2}\right)$$
$$z_D = -2\sqrt{3} + 2i.$$

c)



<u>Exercice 2 :</u> Sur 4 points

1. $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ $AR_8R_9R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$
$AR_1R_2R_4R_6R_7B$ $AR_8R_{10}R_{12}R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$
$AR_1R_2R_5R_4R_6R_7B$ $AR_8R_{11}R_{13}R_{15}R_{17}R_{18}B$

2. **a)** p_1 probabilité de l'évènement "le personnage virtuel passe par le rocher R_7".

Il y a 3 chemins sur 6 qui passent par R_7 donc $\mathbf{p_1} = \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{1}{2}}$.

b) p_2 probabilité de l'évènement "le personnage virtuel passe par le rocher R_{14}".

Il y a 2 chemins sur 6 qui passent par R_{14} donc $\mathbf{p_2} = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$.

3. a) $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ = 6 bonds $\Rightarrow$ 12 s
$AR_1R_2R_4R_6R_7B$ = 6 bonds $\Rightarrow$ 12 s
$AR_1R_2R_5R_4R_6R_7B$ = 7 bonds $\Rightarrow$ 14 s
$AR_8R_9R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$ = 7 bonds $\Rightarrow$ 14 s
$AR_8R_{10}R_{12}R_{14}R_{16}R_{17}R_{18}B$ = 8 bonds $\Rightarrow$ 16 s
$AR_8R_{11}R_{13}R_{15}R_{17}R_{18}B$ = 7 bonds $\Rightarrow$ 14s

Donc X peut prendre les valeurs : **12, 14 et 16**.

b) Donner la loi de probabilité de la variable X.

X = x_i	12	14	16
p_i	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c) $E(X) = 12 \times \frac{1}{3} + 14 \times \frac{1}{2} + 16 \times \frac{1}{6}$

$\mathbf{E(X) = \frac{41}{3} \approx 13{,}66}$ **secondes**.

4. Soit x la durée d'un bond.
La loi de probabilité de X est donc :

X = x_i	6x	7x	8x
p_i	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

et $E(X) = \frac{1}{3} \times 6x + \frac{1}{2} \times 7x + \frac{1}{6} \times 8x$

$E(X) = 2x + \frac{7}{2}x + \frac{4}{3}x$

$E(X) = \left(2 + \frac{7}{2} + \frac{4}{3}\right)x$

$E(X) = \frac{41}{6}x$.

On veut que E(X) = 10 donc $\frac{41}{6}x = 10$

$x = \frac{60}{41} \approx 1{,}46$ s.

La durée d'un bond du personnage virtuel devrait être **de environ 1,46 s** pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes.

<u>Problème :</u> Sur 10 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. g est dérivable sur]0 ; + ∞[et on a pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0 ; +∞[:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$\mathbf{g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}}$$

Sur]0 ; + ∞[; $x > 0$ et $2x^2 + 1 > 0$ donc **g'(x) > 0**

Sur]0 ; + ∞[, g'(x) > 0 donc g est strictement croissante.

2. $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0$.
Donc sur] 0 ; 1 [g(x) est négative ;
Sur] 1 ; + ∞ [, g(x) est positive ;
Pour x = 1, g(x) est nulle.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction *f*

1. *f* est dérivable sur]0 ; + ∞[et on a pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0 ; +∞[:

$$f'(x) = a - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = a - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$\mathbf{f'(x) = \frac{ax^2 - 1 + \ln x}{x^2}}$$

2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) donc $f(1) = 0$.
La courbe C admet en 1 une tangente horizontale donc $f'(1) = 0$.

$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow a + b - \frac{\ln 1}{1} = 0 \quad \Rightarrow a + b = 0$$

$$f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \frac{a - 1 + \ln 1}{1} = 0 \quad \Rightarrow a - 1 = 0$$

Donc **a = 1 et b = – 1**

Donc $\mathbf{f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}}$

Partie C : Étude de la fonction *f*

1. a) $\lim\limits_{x \to 0} (x - 1) = -1$ et $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\}$ Donc par produit $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

Donc par différence $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$

La courbe C admet une asymptote verticale d'équation x = 0.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Donc par différence $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} \boldsymbol{f}(x) = +\infty}$

2. a) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 1 + \ln x}{x^2} \text{ avec } a = 1$$

$$\text{soit } f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \qquad \text{donc} \qquad \mathbf{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$$

b) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g(x) car x^2 est positif.

Donc sur $]0\,;1[$ $f'(x)$ est négative ; donc f est décroissante
Sur $]1\,;+\infty[$, $f'(x)$ est positive ; donc f est croissante
Pour x = 1, $f'(x)$ est nulle donc f admet un minimum.

Tableau de variation de f :

$f(1) = 1 - 1 - \dfrac{\ln 1}{1} = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) La fonction f admet un minimum nul donc :
Sur $]0\,;+\infty[$ $f(x) \geq 0$.

3. a) $f(x) - (x - 1) = x - 1 - \dfrac{\ln x}{x} - x + 1 = -\dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0.$

La droite D d'équation y = x – 1 est asymptote à la courbe C.

b) $f(x) - (x - 1) = -\dfrac{\ln x}{x}$

Sur $]0\,;+\infty[$ $x > 0$.
Sur $]0\,;1[$ $\ln x < 0$ et sur $]1\,;+\infty[$ $\ln x > 0$ et pour x = 1 $\ln x = 0$.

Donc sur $]0\,;1[$ $-\dfrac{\ln x}{x} > 0$ donc C est au dessus de D

Sur $]1\,;+\infty[$ $-\dfrac{\ln x}{x} < 0$ donc C est au dessous de D

pour x = 1 ; $\dfrac{-\ln x}{x} = 0$ donc C et D se coupent en x = 1

c) Voir graphe en fin d'exercice.

Partie D : Calcul d'aire

1. a) H est dérivable sur]0 ; + ∞[et pour tout x appartenant à l'intervalle]0 ; +∞[on a :

$H'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$

$\mathbf{H'(x) = 2\frac{\ln x}{x}}$.

b) Comme $H'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, H est une primitive de $2\frac{\ln x}{x}$

Donc une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est $\frac{H(x)}{2} = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Donc sur]0 ; + ∞[, une primitive de *f* est $\mathbf{F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2}$

2. a) Comme sur [1 ; e] *f*(x) est positif (question 2. c) de la partie B) alors l'aire A est égale à :

$$A = \int_1^e f(x)dx$$

$$= \left[F(x)\right]_1^e$$

$$= F(e) - F(1)$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

$$\mathbf{A = \frac{e^2}{2} - e \text{ (UA)}}$$

$1 \text{ UA} = 2 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$

$\mathbf{A = 2e^2 - 4e \text{ cm}^2}$.

b) Donc $A = 2e^2 - 4e \text{ cm}^2$

A = 3,90 cm² au mm² près.